17. januar 2006

HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG

5.3 Lineær uavhengighet

Def. $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$, en mengde vektorer er **lineært uavhengig** hvis og bare hvis

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_r = 0$$

ellers kalles S **lineært avhengig**.

Eksempel: Lineær uavhengighet

$\{i = (1,0,0), j = (0,1,0), k = (0,0,1)\}$ er en lineært uavhengig mengde.

Anta $\lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k = 0$

$$\lambda_1 (1,0,0) + \lambda_2 (0,1,0) + \lambda_3 (0,0,1) = (0,0,0)$$

$$(\lambda_1, 0, 0) + (0, \lambda_2, 0) + (0, 0, \lambda_3) = (0,0,0)$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0) \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Mao. $\{i, j, k\}$ er en lineært uavhengig mengde.

Lignende bevis brukes for $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \ldots e_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

Eksempel: Lineær avhengighet

$u = (1,0,0)$ $v = (0,1,0)$ $w = (7,8,0)$ er lin. avh.

fordi $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$ har løsn. f.eks.

$7u + 8v - w = 0$, dvs. $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 8$, $\lambda_3 = -1$.

Oppgave: Gitt $(1,8)$ og $(2,8)$. Avgjør om de er lua. eller la.?

lineært uavhengige

lineært avhengige

Løsning: $\lambda(1,8) + \mu(2,8) = (0,0)$

$(\lambda + 2\mu,\ 8\lambda + 8\mu) = (0,0)$

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = 0 \\ 8\lambda + 8\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow \lambda = -\mu \quad : \quad -\mu + 2\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$

$\lambda = 0$

så $(1,8)$ og $(2,8)$ er lin. uavh.

Gjør tilsvarende for $(1,8)$ og $(2,16)$.

$\lambda(1,8) + \mu(2,16) = 0$

$(\lambda + 2\mu,\ 8\lambda + 16\mu) = (0,0)$

$$\left.\begin{aligned} \lambda + 2\mu &= 0 \\ 8\lambda + 16\mu &= 0 \end{aligned}\right\} \text{en løsn. } \lambda = 2 \text{ og } \mu = -1.$$

$\Rightarrow (1,8)$ og $(2,16)$ er l.a.

Teorem 5.3.1

Gitt $S = \{v_1, \dots, v_r\}$ $\quad r \geq 2$.

a) S er lineært uavhengig hvis og bare hvis ($\Leftrightarrow$) ingen vektor i S kan skrives som en lineærkombinasjon av de andre.

b) S er lineært avhengig hvis og bare hvis det fins en $v_j \in S$ som kan skrives som en lineærkombinasjon av de andre.

Bevis a) ($\Rightarrow$) ved selvmotsigelse

Anta at S er lin. uavh. og at en vektor, f.eks. v_r i S er s.a. $v_r = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{r-1} v_{r-1}$.

da er $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{r-1} v_{r-1} + \lambda_r v_r = 0$ med $\lambda_r = -1$

Det betyr at S er lin. avh. $\lightning$

($\Leftarrow$) Anta at ingen vektor i S kan skrives som en lineærkomb. av de andre. Da må

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$$

Ellers hvis det fins $k_i \neq 0$ er

$$v_i = -\frac{k_1}{k_i} v_1 + \dots - \frac{k_{i-1}}{k_i} v_{i-1} - \frac{k_{i+1}}{k_i} v_{i+1} + \dots - \frac{k_r}{k_i} v_r$$

Og da kan v_i skrives som en lin. komb. av de andre vektorene.

(b) bevises på lignende måte.

Eksempel i, j, k er lineært uavhengige.

La oss prøve å skrive k som en lin.komb. av i og j.

$k = \alpha i + \beta j$, dvs.

$$(0,0,1) = (\alpha, 0, 0) + (0, \beta, 0) = (\alpha, \beta, 0)$$

$\Rightarrow$ $\alpha = 0$, $\beta = 0$ og $1 = 0$?! ikke mulig.

Det samme gjelder for i og j.

Eksempel:

$u = (1,0,0)$, $v = (0,1,0)$, $w = (7,8,0)$ er lineart avh.
Da må teoremet pkt b) gjelde, dvs. vi må kunne skrive en av dem som en lineær komb. av de andre. Feks. $w = 7u + 8v$

LINEÆR UAVHENGIGHET AV FUNKSJONER

Gitt $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, n funksjoner på $(-\infty,\infty)$
Kontinuerlig deriverbare $n-1$ ganger $\quad C^{n-1}(-\infty,\infty)$

Vi skal bestemme om de er lineart avhengige eller uavhengige i vektorrommet av alle funksjoner på $(-\infty,\infty)$

Tar lineærkomb.

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x) = 0 \quad \forall x \in (-\infty,\infty)$$

deriverer n-1 ganger

$$k_1 f_1'(x) + \cdots + k_n f_n'(x) = 0$$
$$\vdots$$
$$k_1 f_1^{(n-1)}(x) + \cdots + k_n f_n^{(n-1)}(x) = 0$$

Systemet har n ligninger og n ukjente $k_1, \ldots, k_n$

Lager matrisa

$$W(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

Hvis $f_1, f_2, \ldots, f_n$ er lineært avhengige fins det en ikke-triviell løsning av systemet $k_1, \ldots, k_n$ som gjelder for alle x, og $\det(W(x)) = 0 \quad \forall x$.

↑ Wronski-determinanten.

Så, hvis $\det(W(x)) \neq 0$ på $(-\infty, \infty)$ er funksjonene $f_1, f_2, \ldots, f_n$ lineært uavhengige.

NB! Det motsatte er ikke tilfelle, så hvis $\det(W(x)) = 0$ kan vi ikke trekke noen slutning.

Eks

Vis at følgende funksjoner er lineært uavhengige: $1, x, x^2$.

Finner Wronskideterminanten: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

Siden $\det(W(x)) = 2$ ikke er identisk lik null for alle $x \in (-\infty, \infty)$, så er $1, x$ og x^2 l.ua.